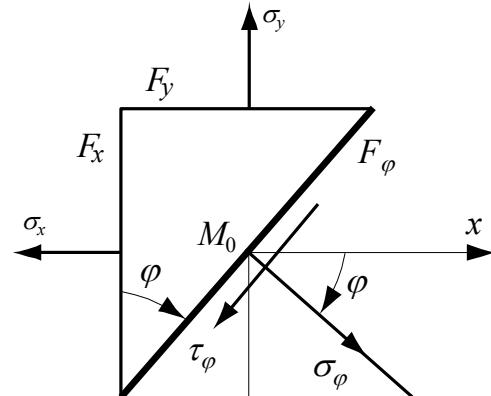


Mécanique des structures



Chapitre 3: État de contrainte bidimensionnel

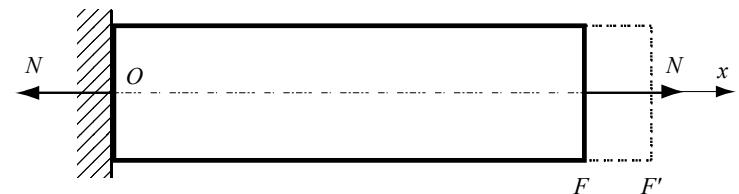
Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



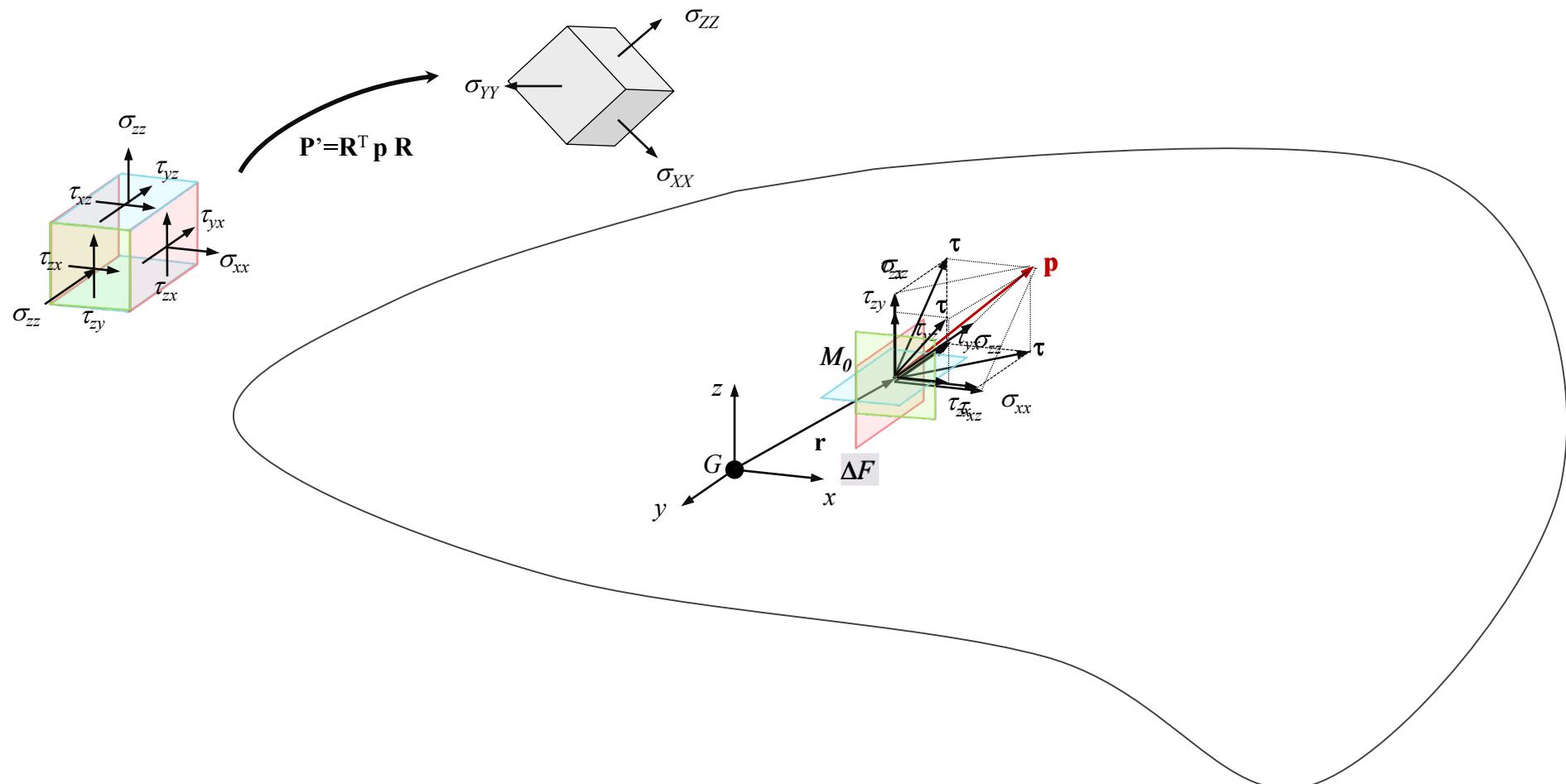
Chapitre 2 : Traction ou compression simple

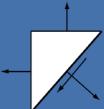
Rappel



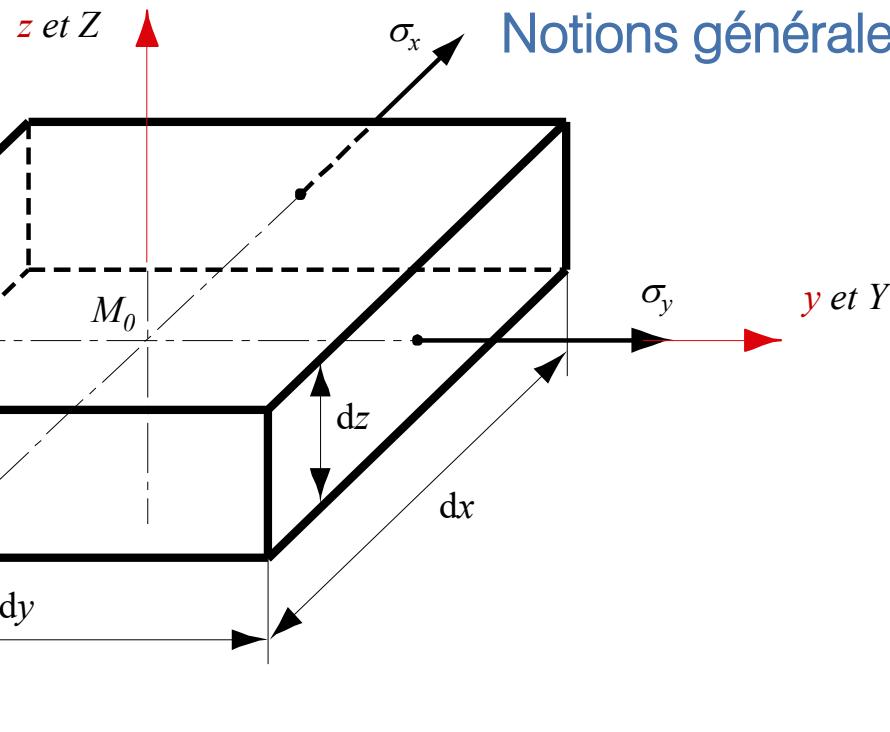


Chapitre 2 : Traction ou compression simple





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

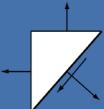


Notions générales : Principe de superposition

- $\sigma_1 = \sigma_x$
- $\sigma_2 = \sigma_y < \sigma_x$
- $\sigma_3 = \sigma_z = 0 < \sigma_y$

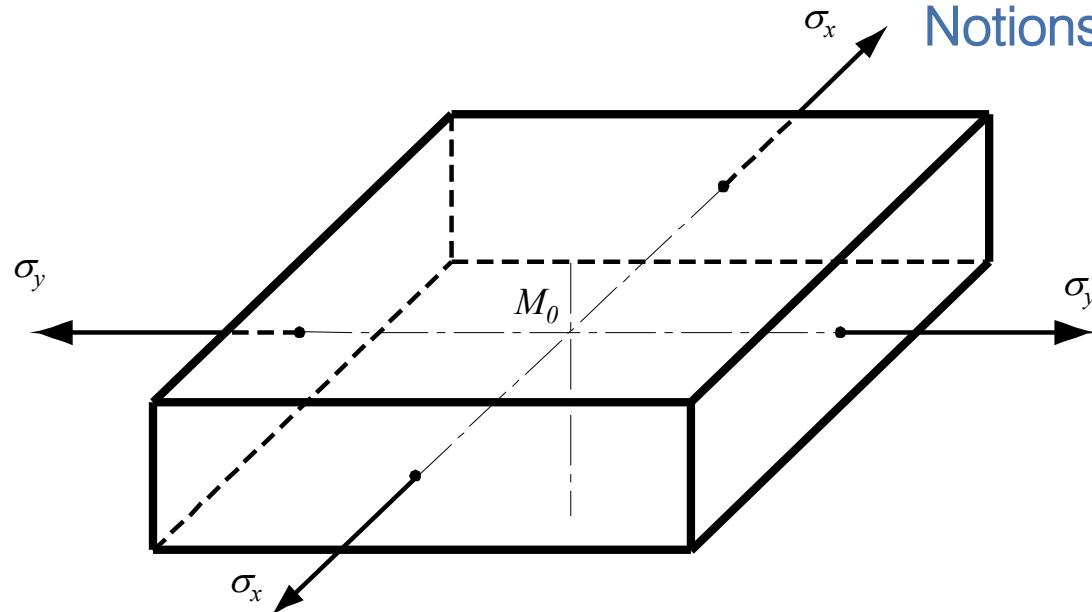
Quand l'une des trois contraintes principales est nulle, l'état de contrainte est dit **bidimensionnel**, tel qu'il apparaît par exemple dans des enceintes sous pression ou dans des membranes de capteurs.

Dans ce qui suit, nous ne nous écarterons pas de la loi de proportionnalité et du **principe de superposition**. *Chaque contrainte entraîne les mêmes déformations que si elle était appliquée seule et la déformation résultante est la somme des déformations partielles.*

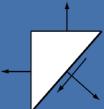


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Notions générales : Principe de superposition



	Allongement selon M_0x	Allongement selon M_0y	Allongement selon M_0z
Effet de σ_x	$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{yx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{zx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$
Effet de σ_y	$\varepsilon_{xy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{zy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$
Somme	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$	$\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$



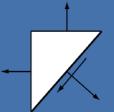
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Principe de superposition

Ces résultats peuvent aisément être généralisés à un état de contrainte tridimensionnel (σ_x σ_y σ_z) avec les allongements relatifs :

- $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$
- $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}$
- $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}$

	Allongement selon M_0x	Allongement selon M_0y	Allongement selon M_0z
Effet de σ_x	$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{yx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{zx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$
Effet de σ_y	$\varepsilon_{xy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{zy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$
Effet de σ_z	$\varepsilon_{xz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_{yz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E}$
Somme	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x - \mu \sigma_z)$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y)$



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Principe de superposition

Ces résultats peuvent aisément être généralisés à un état de contrainte tridimensionnel ($\sigma_x \sigma_y \sigma_z$) avec les allongements relatifs :

- $\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$
- $\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}$
- $\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}$



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

(sym)

matrice de compliance



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Forme matricielle (mécanique des solides)

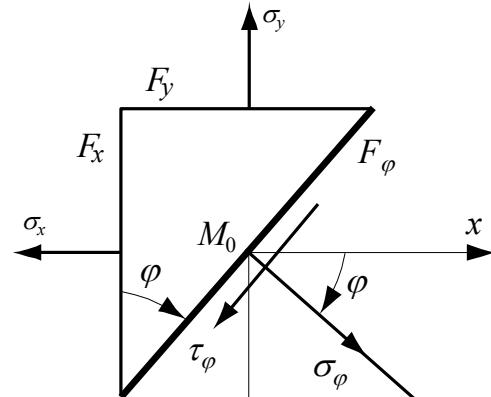
L'état de contrainte à un point n'est pas un scalaire ou un vecteur. C'est un objet mathématique plus compliqué et appelé **tenseur** (une norme et 2 directions)

Matrice de rigidité (voir chapitre 13)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

(sym)

Mécanique des structures

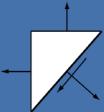


Chapitre 3: État de contrainte bidimensionnel

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

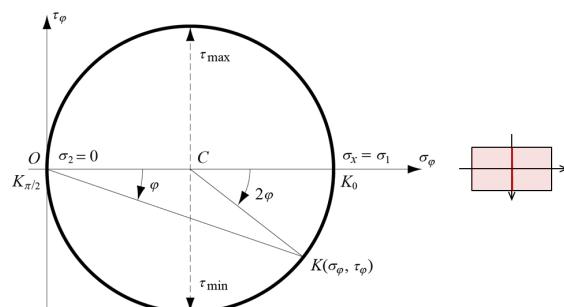
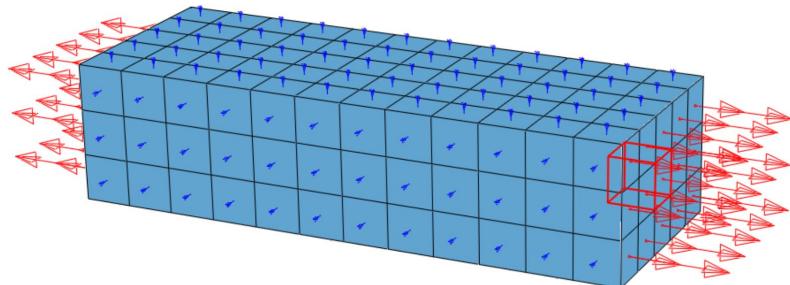
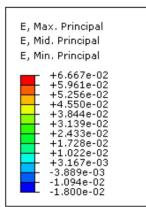
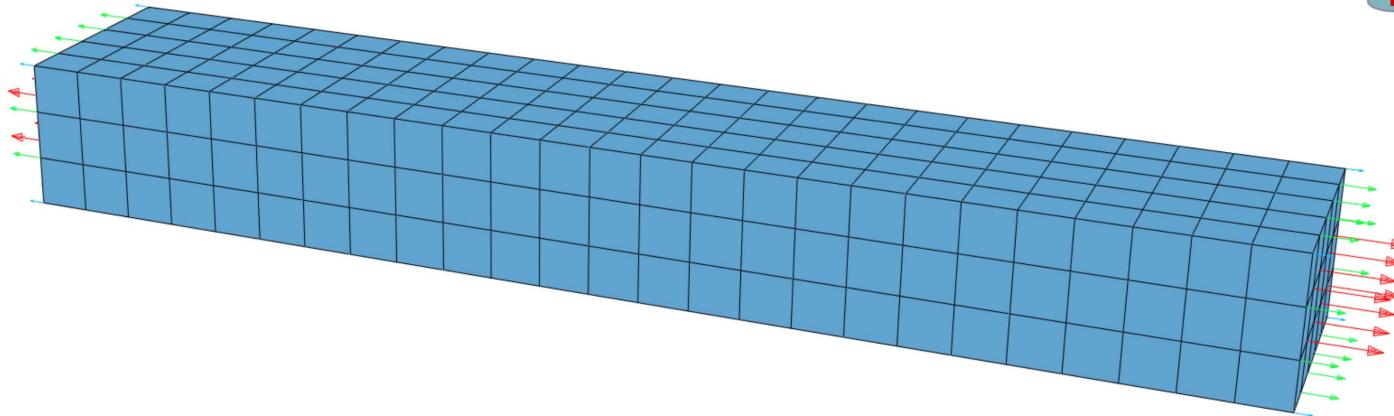
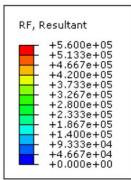
EPFL



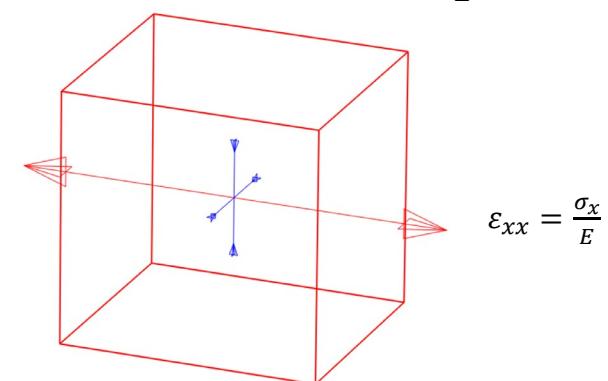


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

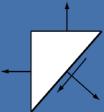
Introduction



$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

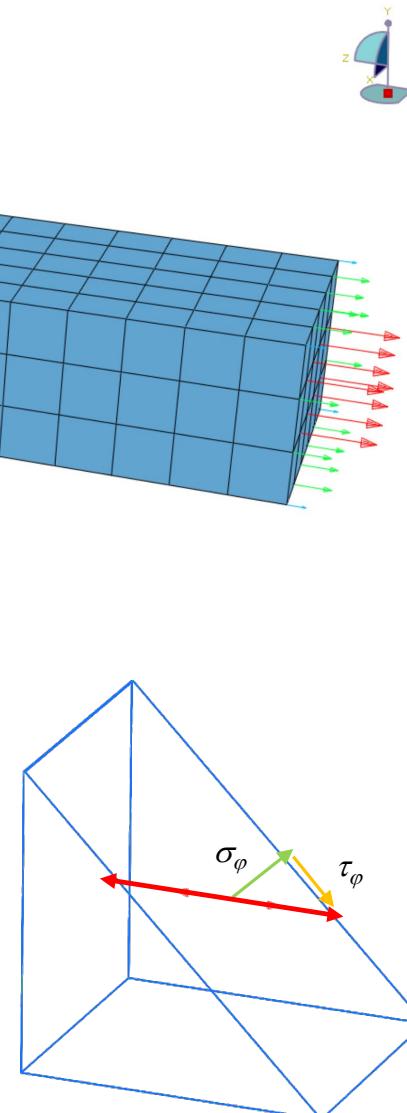
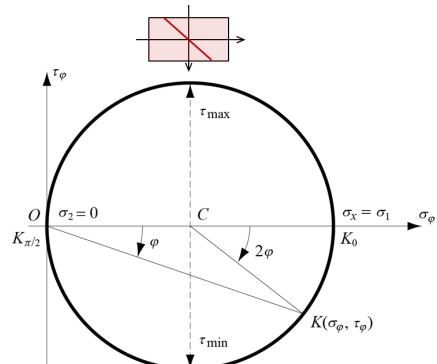
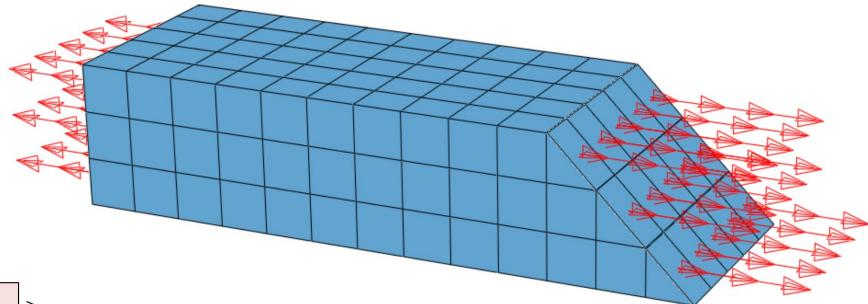
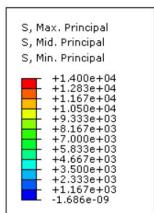
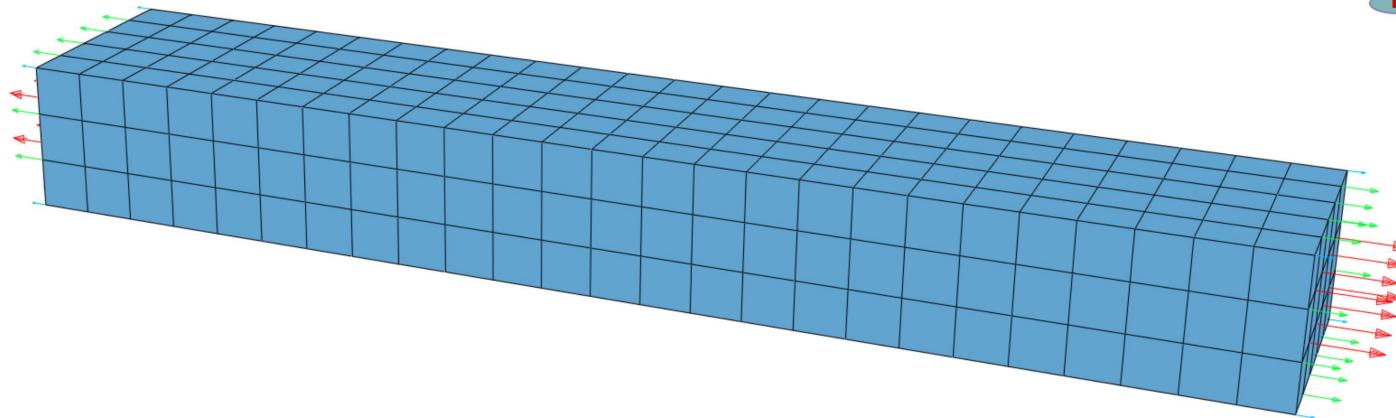
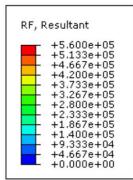


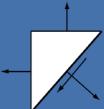
$$\sigma_z = \sigma_y = 0$$



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Introduction



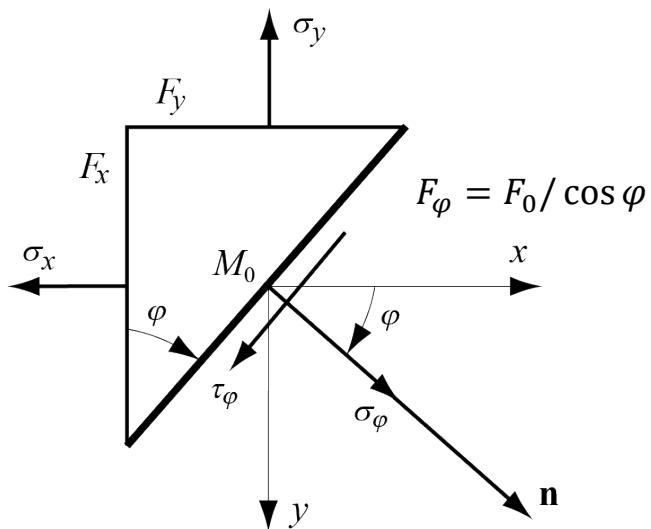


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

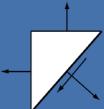
Analyse de l'état de contrainte bidimensionnelle

Les conditions de symétrie permettent souvent de connaître a priori les trois axes principaux en un point M_0 du solide, qui sont alors choisis comme axes de référence.

Calculons les contraintes normale σ_φ et tangentielle τ_φ dans une section oblique F_φ tournant autour de l'axe M_0z ($\sigma_z = 0$) et dont la normale \mathbf{n} fait un angle φ avec l'axe principal M_0x



- $F_\varphi \sigma_\varphi - F_x \sigma_x \cos \varphi - F_y \sigma_y \sin \varphi = 0$
- $F_\varphi \tau_\varphi + F_x \sigma_x \sin \varphi - F_y \sigma_y \cos \varphi = 0$



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

État de contrainte bidimensionnelle pour axes de référence coïncidant avec les axes principaux

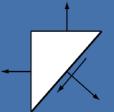
En vertu de la définition des faces $F_x = F_\varphi \cos \varphi$ et $F_y = F_\varphi \sin \varphi$, les relations précédentes deviennent, après simplification par F_φ

- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi$
- $\tau_\varphi = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \varphi \sin \varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\ \sin^2 \varphi &= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \\ \cos \varphi \sin \varphi &= \frac{\sin 2\varphi}{2}\end{aligned}$$

On retrouve les équations paramétriques d'un cercle compris entre les contraintes principales $\sigma_1 = \sigma_x$ et $\sigma_2 = \sigma_y$ agissant sur les plans principaux entre lesquels la section tourne. Les contraintes de cisaillement τ_{max} et τ_{min} apparaissent à nouveau sur des sections dont les normales font respectivement les angles $-\pi/4$ et $+\pi/4$ avec l'axe principal M_0x .

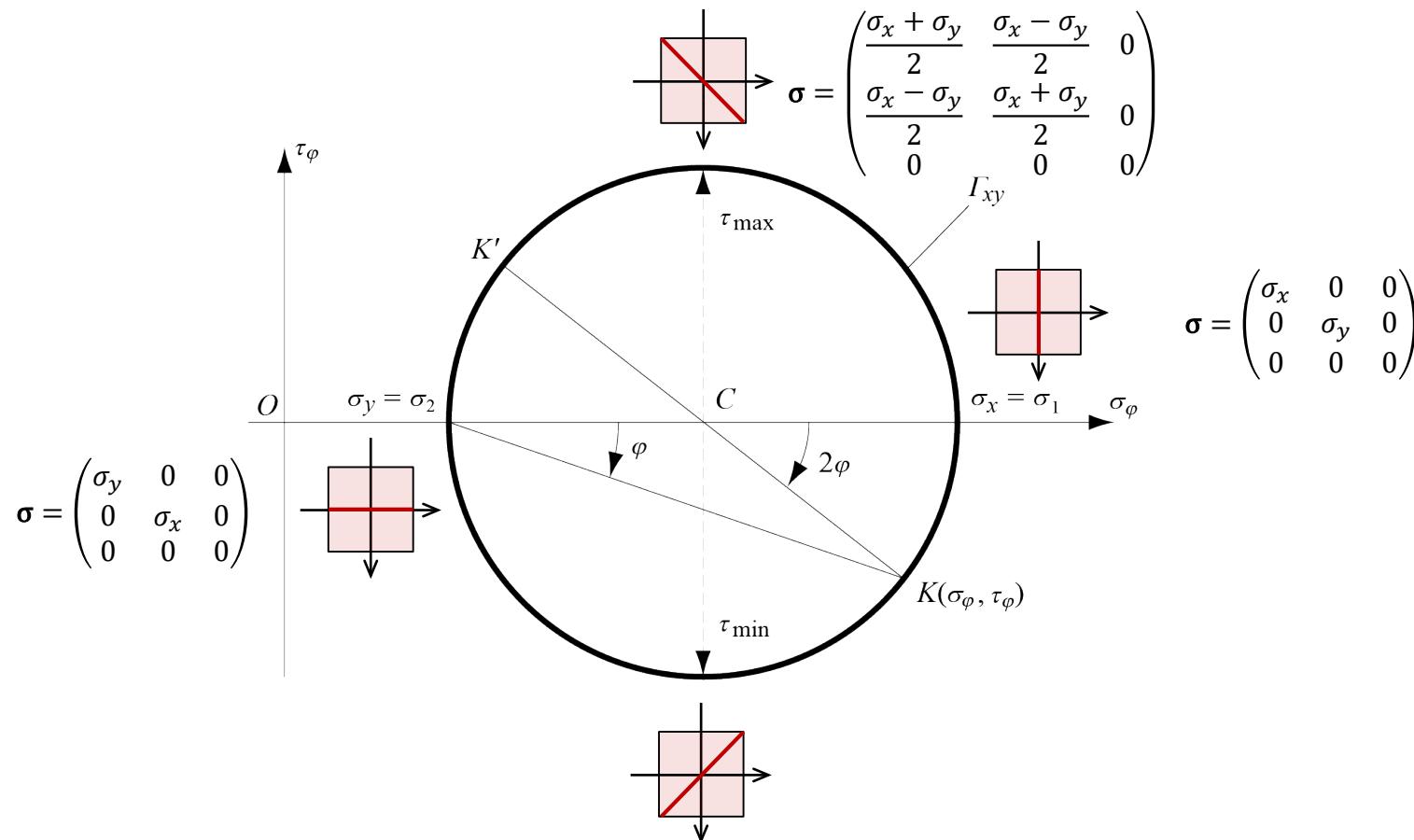
Il s'agit du *cercle de Mohr* Γ_{xy} pour une section oblique tournant autour de M_0z



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

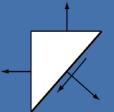


État de contrainte bidimensionnelle pour axes de référence coïncidant avec les axes principaux



Cercle de Mohr Γ_{xy} pour une section oblique tournant autour de $M_0 z$

- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi$
- $\tau_\varphi = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \varphi \sin \varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$

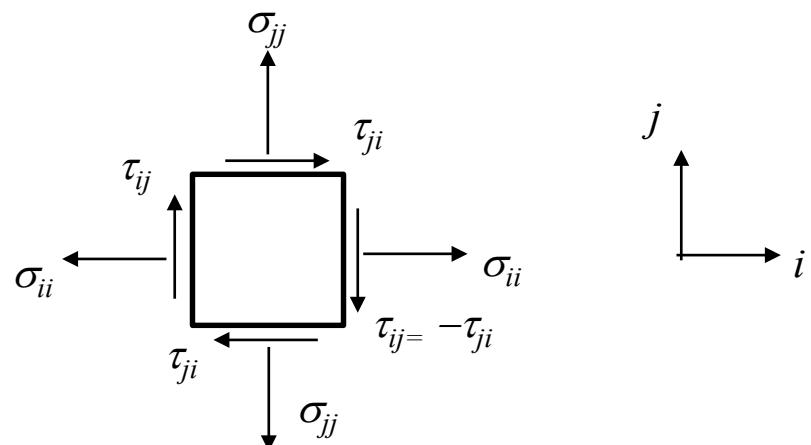


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

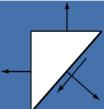
État de contrainte bidimensionnelle pour axes de référence coïncidant avec les axes principaux

Dénomination des contraintes

- σ_{ii} contrainte normale
- τ_{ij} contrainte tangentielle (j normale au plan, i direction application charge)



Back



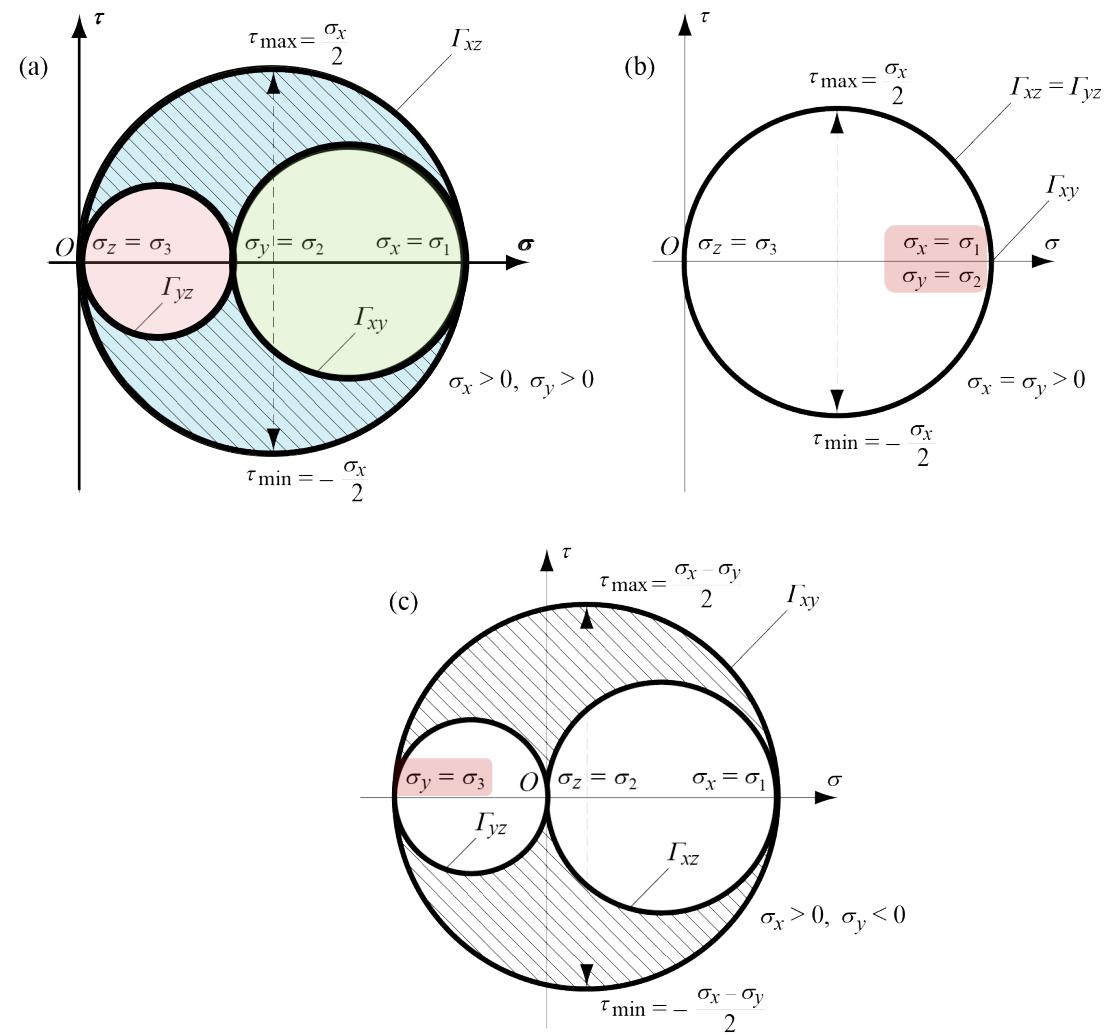
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

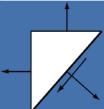
État de contrainte bidimensionnelle pour axes de référence coïncidant avec les axes principaux

Il est à remarquer à ce stade que le *cercle de Mohr* Γ_{xy} est construit grâce à la rotation d'une section autour de M_0z ;

Rien n'empêche d'appliquer la démarche selon les deux autres axes. Ainsi, la recherche des contraintes dans une section oblique tournant autour de l'axe principal M_0x conduit à un cercle de Mohr Γ_{yz} situé entre les contraintes σ_y et $\sigma_z = 0$ correspondant aux plans principaux entre lesquels la section tourne.

De même, une section oblique tournant autour de M_0y conduit au cercle Γ_{xz} compris entre σ_x et $\sigma_z = 0$. On peut donc distinguer trois situations caractéristiques





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

État de contrainte pour axes de référence **differents** des axes principaux

Contraintes dans une section oblique lorsque σ_x et σ_y ne sont pas principales.

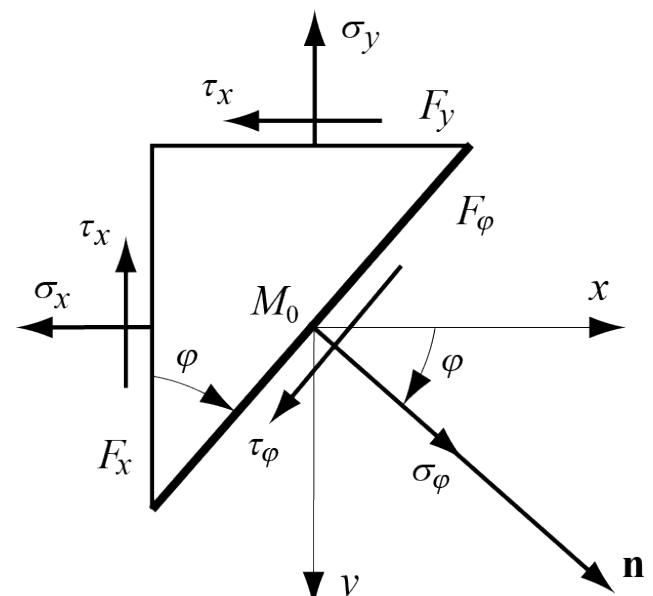
- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_x \sin \varphi \cos \varphi$
- $\tau_\varphi = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_x (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$

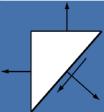
L'insertion de l'angle 2φ permet d'expliciter ces relations sous la forme

- $\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_x \sin 2\varphi$
- $\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_x \cos 2\varphi$

Qui peut aussi s'écrire

- $\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos 2(\varphi - \varphi_0)$
- $\tau_\varphi = -R \sin 2(\varphi - \varphi_0)$
- $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$
- $\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

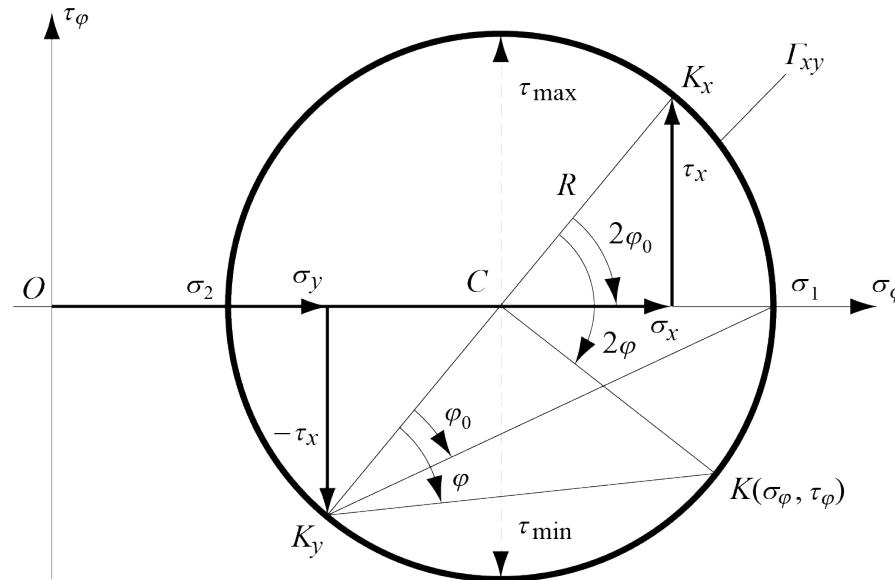
État de contrainte pour axes de référence **differents** des axes principaux

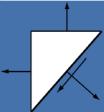
On retrouve l'équation du cercle fondamental de l'état de contrainte bidimensionnel. Il est cette fois compris entre les contraintes principales

- $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$
- $\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$

Le fait que la contrainte normale est extremum quand la contrainte tangentielle est nulle est vérifié par les équations précédentes. En effet, la dérivation de la première équation par rapport à l'angle 2φ permet d'écrire

- $\frac{d\sigma_\varphi}{d(2\varphi)} = \tau_\varphi$





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée

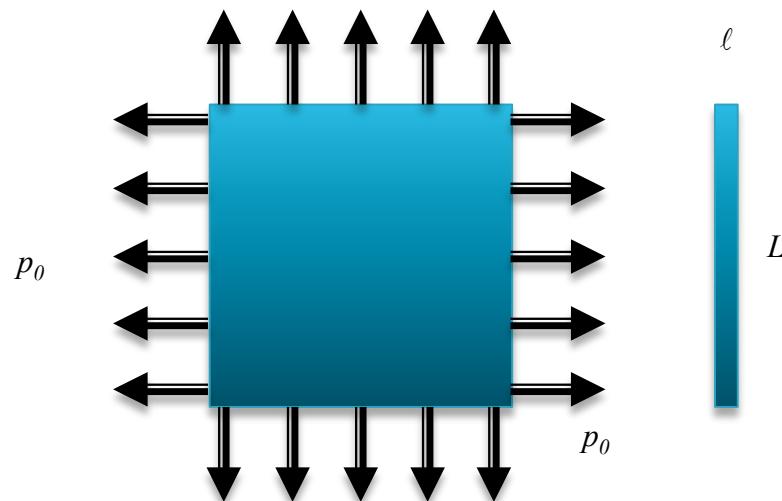
Une plaque carrée, en acier laminé à chaud, de 50 cm de côté et 2 mm d'épaisseur, subi sur son contour une charge linéique de $p_0 = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$.

$$L = 50 \text{ cm}$$

$$\ell = 2 \text{ mm}$$

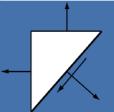
$$E = 201 \text{ GPa}$$

$$\mu = 0.27$$



Calculer :

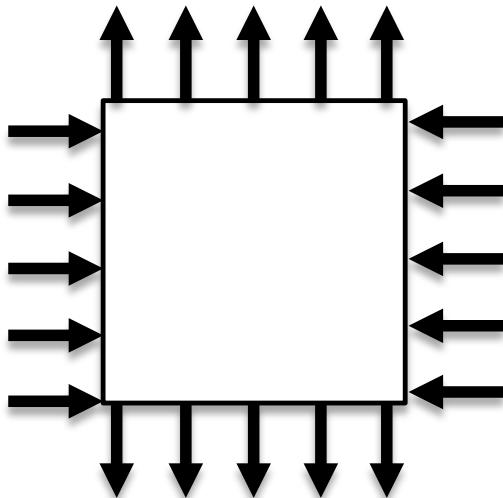
- 1) Les contraintes σ_x et σ_y au centre de la plaque et la contrainte de cisaillement sur le plan à 45°
- 2) Les allongements relatif ε et absolu ΔL des côtés
- 3) La variation relative de volume
- 4) La densité d'énergie



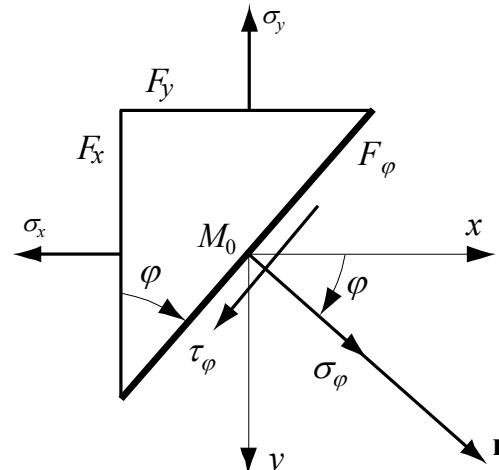
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée en traction - compression

Illustrer la réciprocité d'un état de contrainte en traction – compression (équivalentes) avec un état de contrainte en cisaillement pur (dessiner le cercle de Mohr)



Mécanique des structures



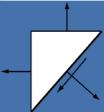
Chapitre 3: État de contrainte bidimensionnel

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL

erratum





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée

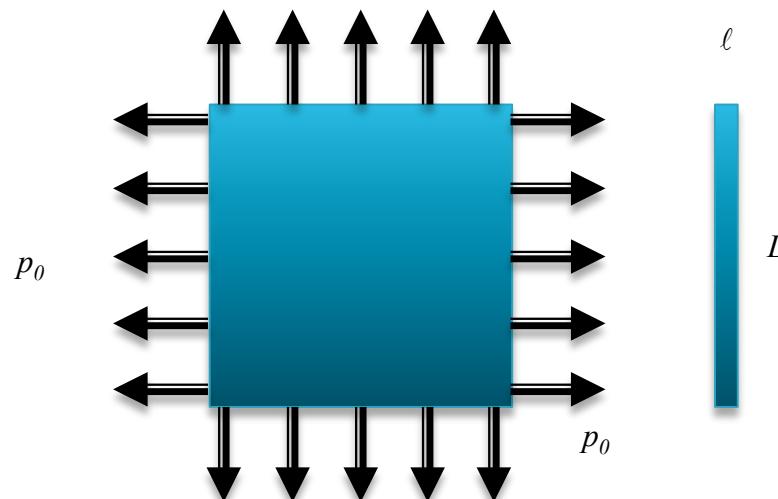
Une plaque carrée, en acier laminé à chaud, de 50 cm de côté et 2 mm d'épaisseur, subi sur son contour une charge linéique de $p_0 = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$.

$$L = 50 \text{ cm}$$

$$\ell = 2 \text{ mm}$$

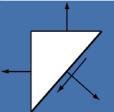
$$E = 201 \text{ GPa}$$

$$\mu = 0.27$$



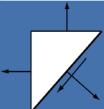
Calculer :

- 1) Les contraintes σ_x et σ_y au centre de la plaque et la contrainte de cisaillement sur le plan à 45°
- 2) Les allongements relatif ε et absolu ΔL des côtés
- 3) La variation relative de volume
- 4) La densité d'énergie



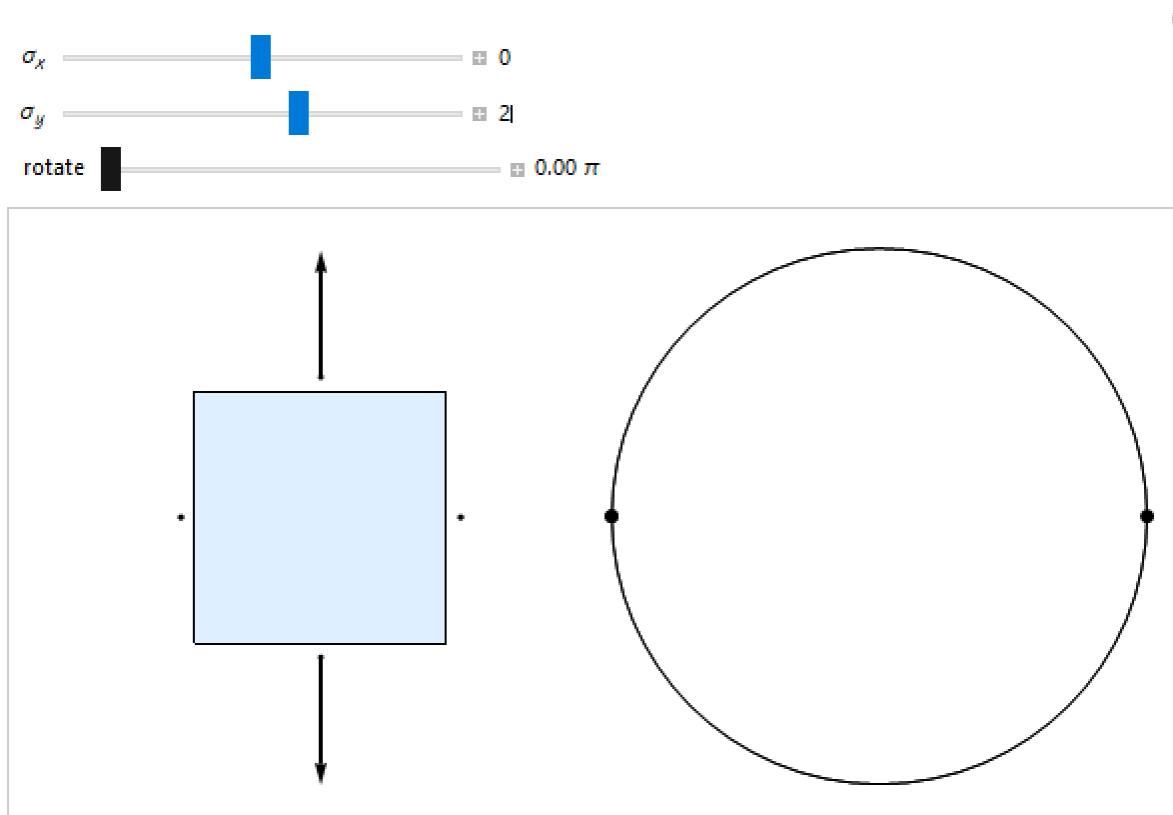
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

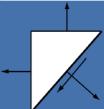
Exemple plaque carrée



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

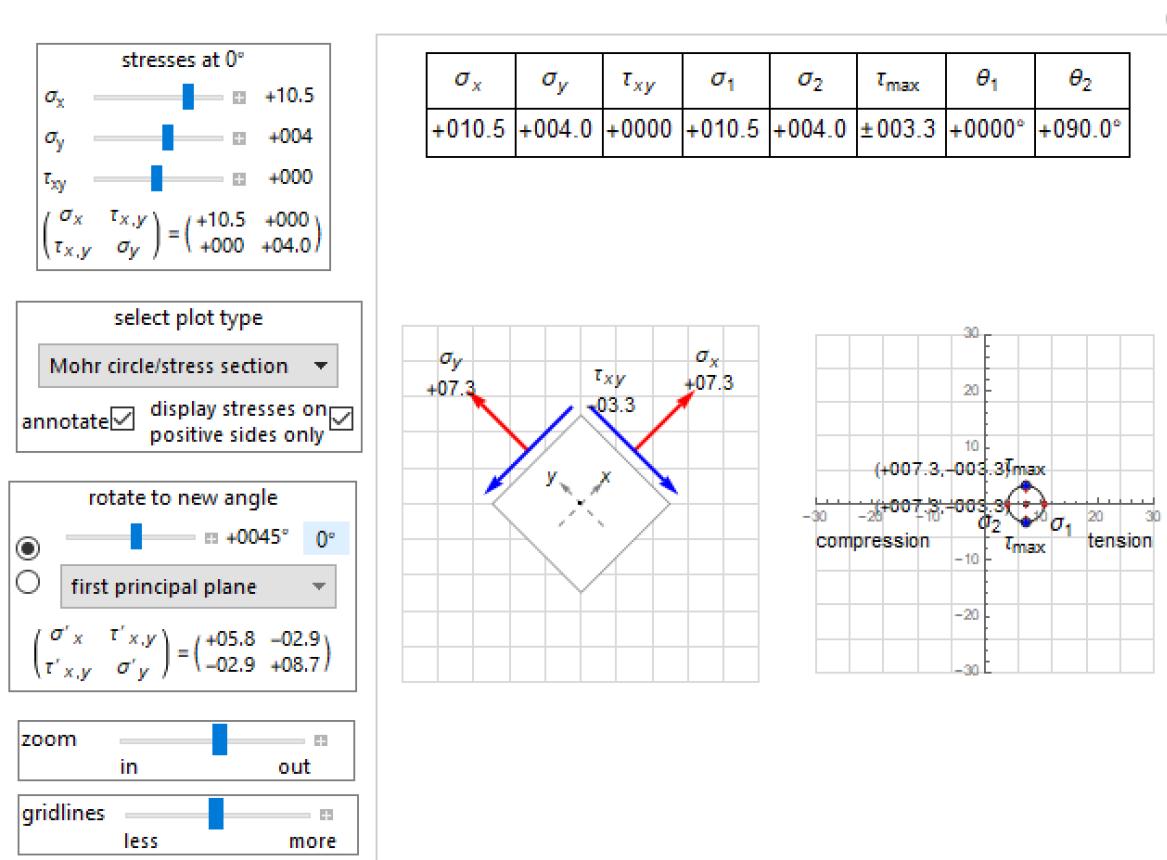
Rotation en contrainte plane

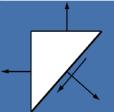




Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Contraintes principales et cercle de Mohr pour un état de contrainte plane

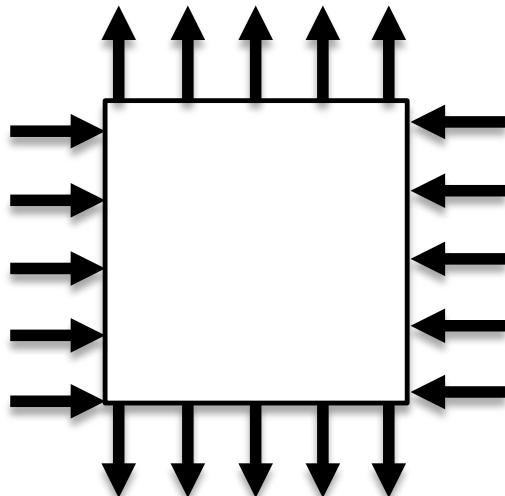


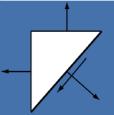


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée en traction - compression

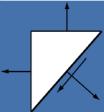
Illustrer la réciprocité d'un état de contrainte en traction – compression (équivalentes) avec un état de contrainte en cisaillement pur (dessiner le cercle de Mohr)





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée en traction - compression

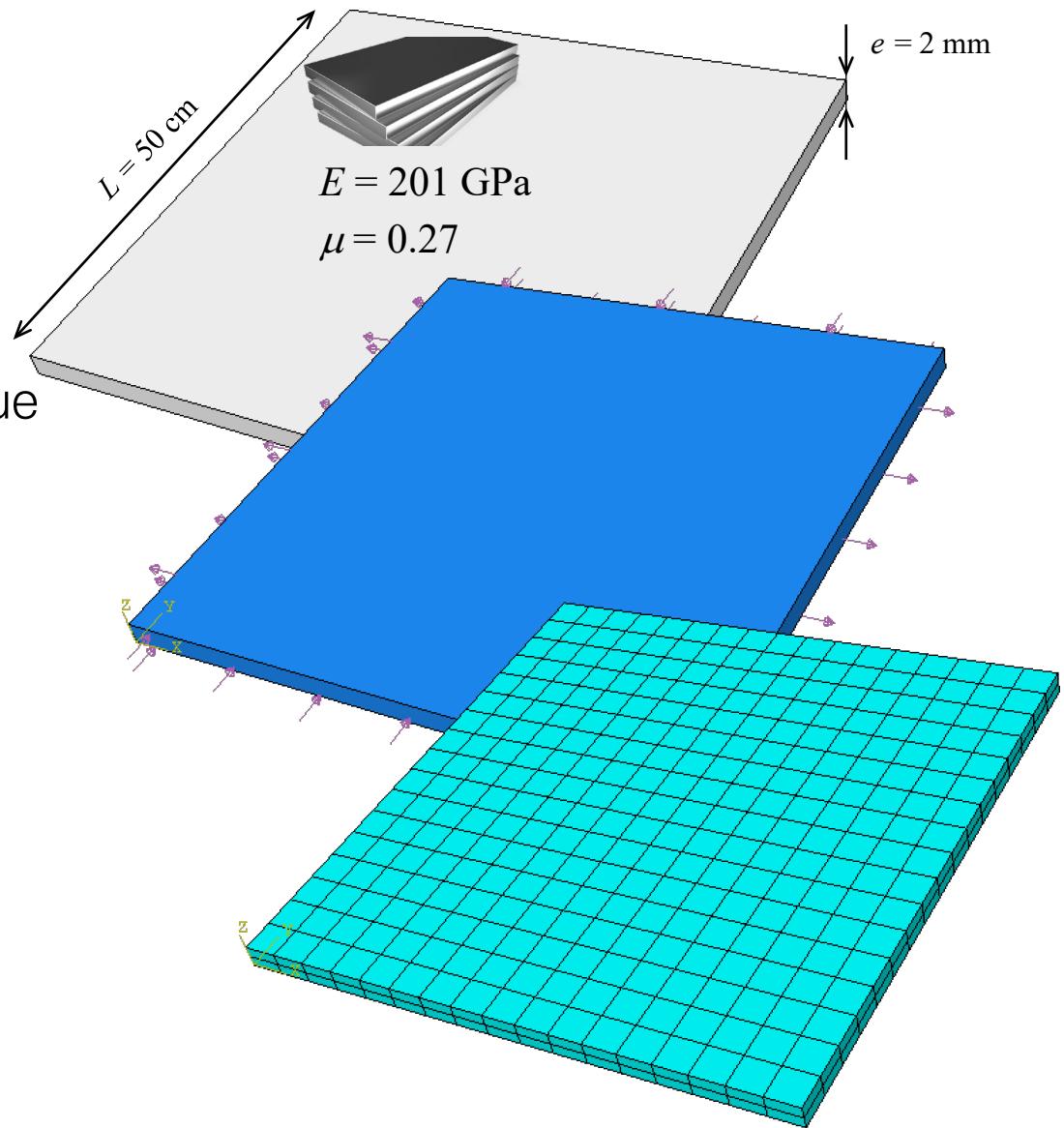


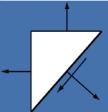
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée en traction - compression

Simulation

- 1) Géométrie
- 2) Matériaux
- 3) Type analyse → linéaire, statique
- 4) Conditions aux limites
- 5) Maillage (quadratique)





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

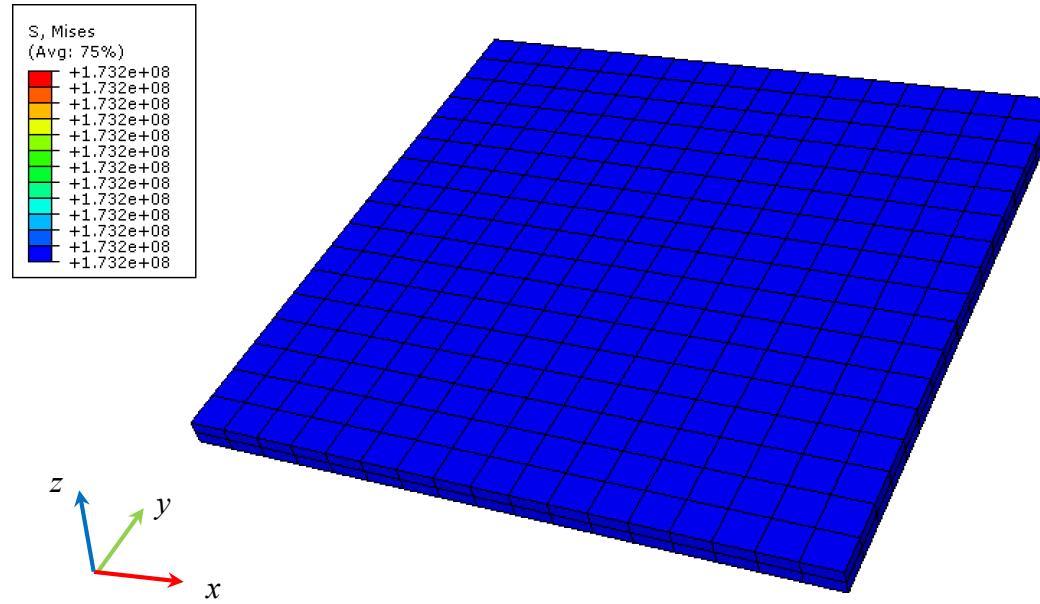
Exemple plaque carrée en traction - compression

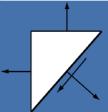
Simulation

- Contrainte équivalente de von Mises $\sigma_{vonMises} = 173 \text{ MPa}$
 - Expression des contraintes:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{N}{A} = \frac{P_0 L}{l L} = \frac{P_0}{l} = 100 \text{ MPa}$$

- Pourquoi ?



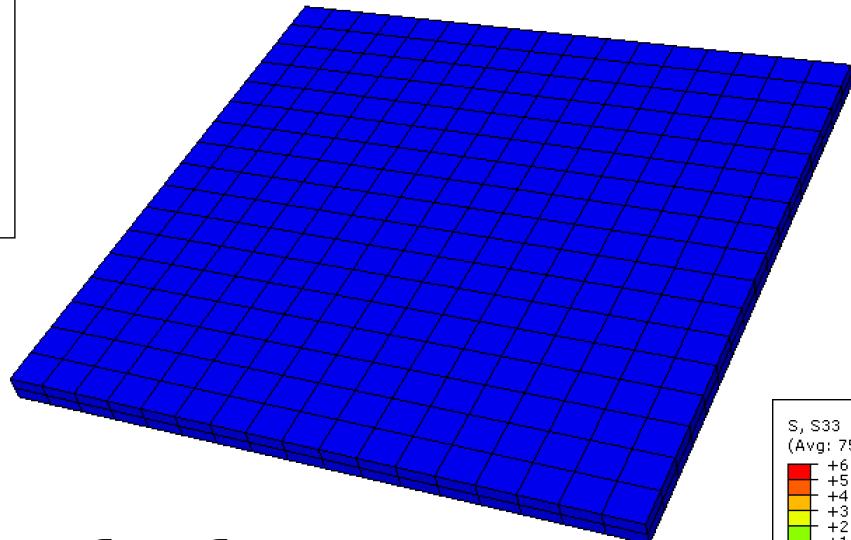
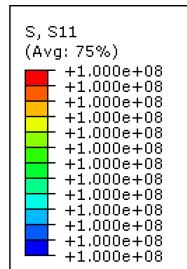


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

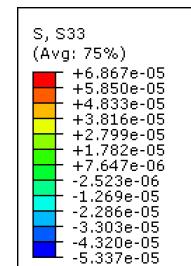
Exemple plaque carrée en traction - compression

Simulation

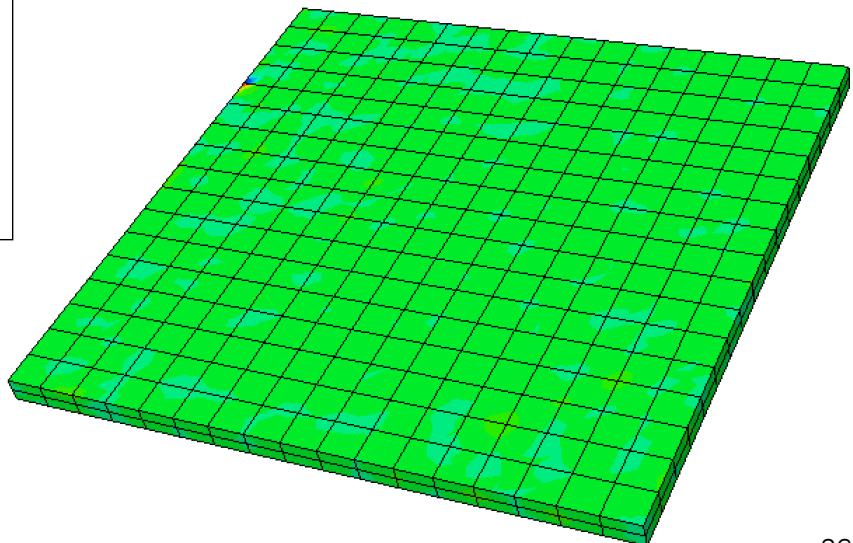
- Contraintes principales

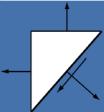


$$\sigma_{22} = \sigma_{11}$$



$$\sigma_3 = 0 \text{ et } \tau_{ij} = 0$$



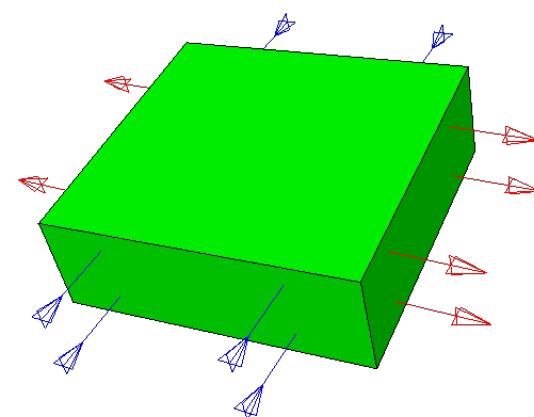
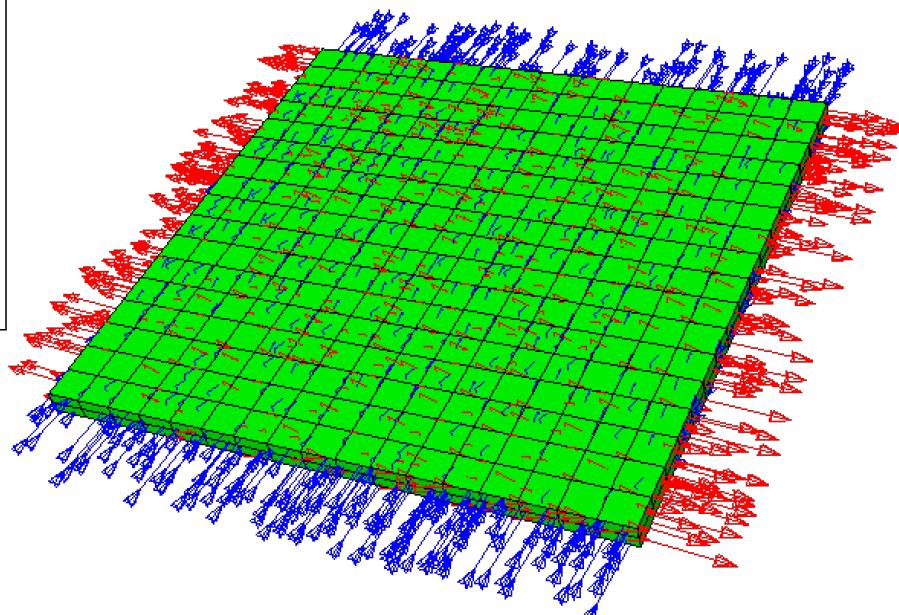
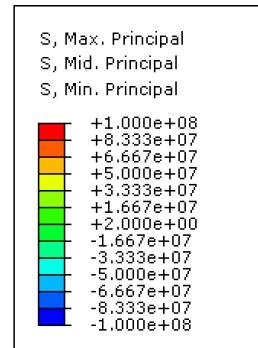


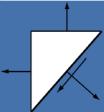
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée en traction - compression

Simulation

- Directions des contraintes principales



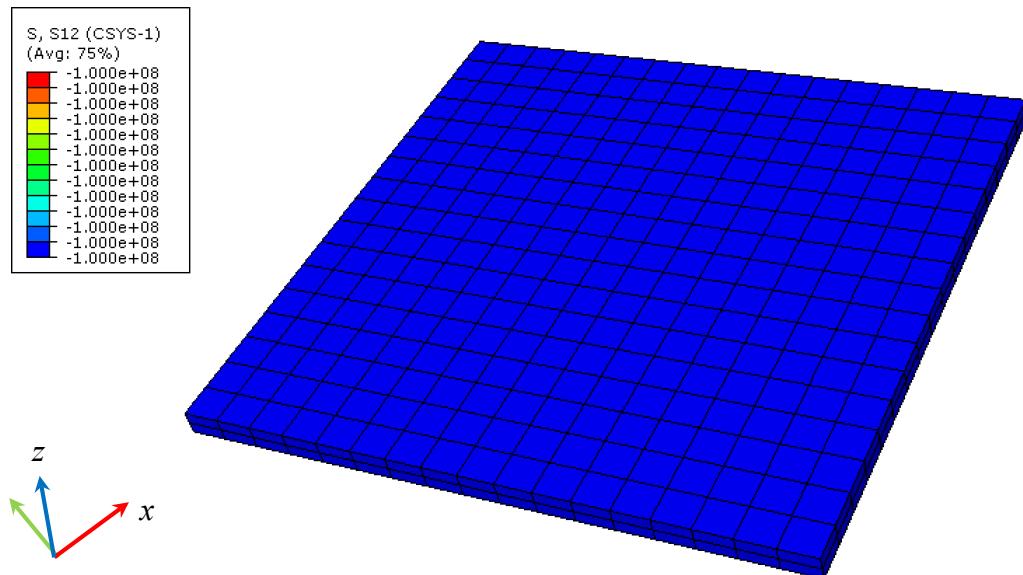


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

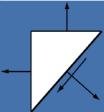
Exemple plaque carrée en traction - compression

Simulation

- Contraintes dans un système de coordonnée à 45°



- Le système de coordonnée pour la représentation des contraintes ne correspond plus aux axes dits «principaux»



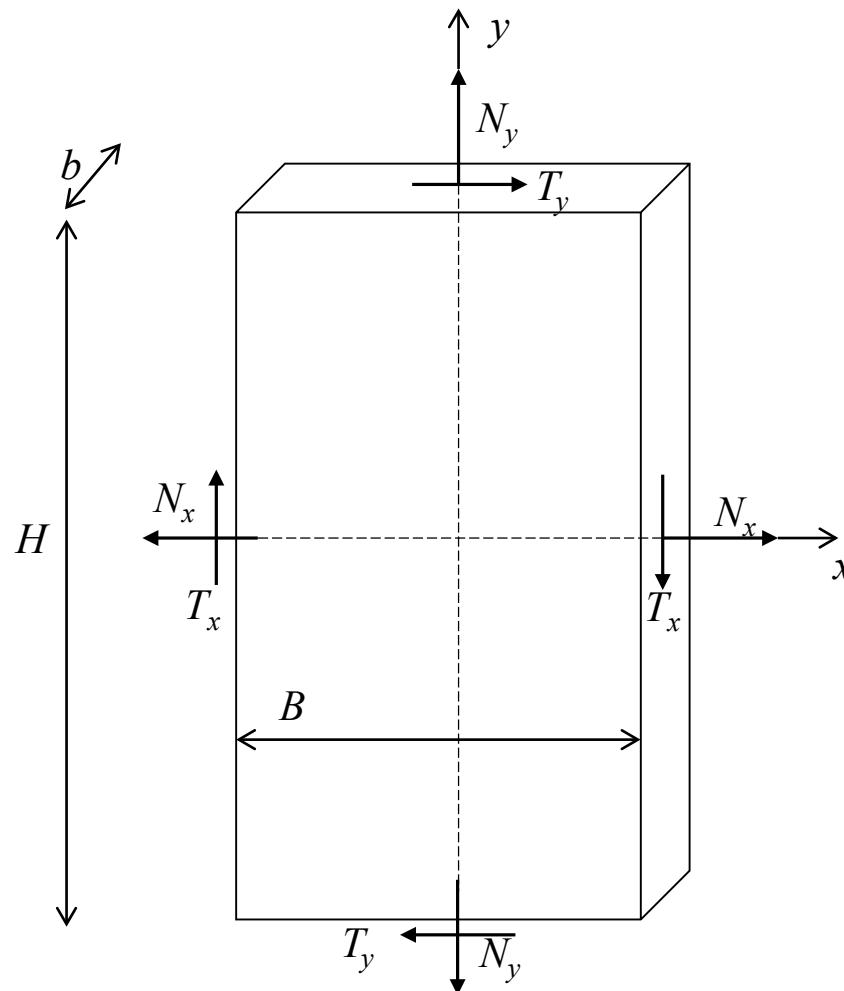
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

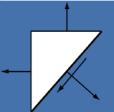
Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

La figure montre un bloc solide soumis à un état de contraintes pour lequel on connaît les composantes normales et tangentielles. Déterminer, par le calcul et sur le cercle de Mohr, les valeurs des contraintes principales.

- $N_x = 2 \times 10^5 \text{ N}$
- $N_y = -3.6 \times 10^4 \text{ N}$
- $T_x = 9 \times 10^4 \text{ N}$

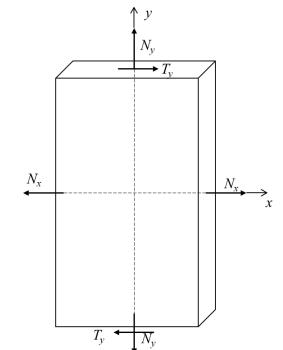
- $B = 6 \text{ cm}$
- $b = 1 \text{ cm}$
- $H = 10 \text{ cm}$

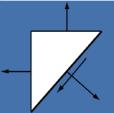




Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple bloc soumis à des charges biaxiales





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

